

文章编号: 1000-7598(2009)09-2753-06

基于 CPT 资料的土性参数随机场特性研究

汪莹鹤^{1,2}, 王保田¹, 安彦勇¹

(1. 河海大学 岩土工程科学研究所, 南京 210098; 2. 中铁第四勘察设计院集团有限公司, 武汉 430063)

摘要: 通过 CPT 资料研究土性参数随机场特性是一种比较理想的方法。土性参数随机场的平稳性是后续研究的先决条件之一, 可以通过 Bartlett 统计量进行检验, 但采用不同的模型拒绝域相差比较大, 这样给实际应用造成困难, 新模型 LGS 由于适应范围广可以解决这一问题。从随机场的基本理论出发, 介绍了新相关模型 LGS 的数值模拟方法。基于 LGS 相关模型, 采用修正的 Bartlett 统计量对随机场平稳性进行检验, 统一了拒绝标准。用两组数据进行了实例分析, 通过编制的程序进行计算, 结果表明, 这种相关模型对不同形式的相关函数有较好的适应性, 可以解决拒绝域不统一的问题。

关键词: 随机场; 相关函数; 相关模型; 相关距离; 平稳性; Bartlett 统计量

中图分类号: TU 413

文献标识码: A

Study of random field characteristics of soil parameters based on CPT measurements

WANG Ying-he^{1,2}, WANG Bao-tian¹, AN Yan-yong¹

(1. Geotechnical Research Institute, Hohai University, Nanjing 210098, China;

2. China Railway Siyuan Survey and Design Group Co. Ltd., Wuhan 430063, China)

Abstract: Cone penetration tests (CPT) measurements are widely used in soil characterization. An important precondition for subsequent study is the stationarity of the soil random field, which can be tested by Bartlett statistics. But the rejection criteria is not accordant when using different autocorrelation models, which brings difficulty in practical using. The new model, LGS, can solve this problem because it can be adaptive with different autocorrelation functions. The simulation of the new autocorrelation model, LGS, is presented based on the random field theory. The stationarity of soil characteristics is tested using modified Bartlett statistics based on the autocorrelation model, LGS, which unifies the rejection criteria. Two examples are analyzed; the result calculated by the program shows that this new model is adaptive with different autocorrelation functions; and the problem of rejection criterion can be solved well.

Key words: random field; autocorrelation function; autocorrelation model; correlation distance; stationarity; Bartlett statistics

1 引言

由于地基土是在漫长的地质年代中形成的, 所以土体参数具有明显的空间变异性。虽然土体各点参数是确定的(不考虑时间效应), 然而人们无法确切知道参数在每点的数值, 只能通过有限样本点去估计未知点, 从而导致随机场的建立。在国外, Vanmarcke 较早系统地研究了随机场理论, 对岩土随机场特性进行了精辟的论述^[1-3]。对于岩土参数的不确定性的原因以及对岩土工程设计的影响, 人

们也进行了杰出的研究^[4-6]。在国内, 学者对随机场也进行了广泛的研究^[7-9]。天津大学闫澍旺教授及其课题组对随机场理论做了深入的探讨并取得大量的成果^[10-12], 并进一步把随机场理论应用于海洋地基土可靠度分析中^[13-14]。

本文主要基于静力触探试验(CPT)资料进行分析, 静力触探试验是一种快速、省力的原位测试方法, 该测试方法可重复性好且能够获得大量连续的数据。通过 CPT 资料研究土性参数随机场特性是一种比较理想的方法^[15-16]。在随机场研究中核心问

收稿日期: 2008-03-05

基金项目: 国家自然科学基金重点项目(No.50639010)。

第一作者简介: 汪莹鹤, 男, 1983年生, 博士, 工程师, 主要从事土体固结理论、路基处理方法、岩土可靠性理论方面的研究工作。E-mail: wangyinghe1983@yahoo.com.cn

题有 3 点, 即相关模型的选择、趋势项函数的选择以及随机场平稳性检验。前人已经提出了很多相关模型, 笔者通过研究 CPT 资料, 对大量相关函数的观察发现, 相关函数的变化范围很广, 现有的模型大部分很难适应所有型式的相关函数, 笔者在文献[17]中提出了一种新的相关模型 (LGS), 对所有的相关函数都能较好的拟合。

随机场的平稳性是后续研究的先决条件, 近年来 Phoon 和 An 基于 Bartlett 检验对土层随机场的平稳性做了很多原创性研究, 对常用的几种相关模型给出了近似的计算公式, 为土层随机场的平稳性检验以及土层划分提供了新方法, 最后与传统的划分方法进行了对比^[18-19]。但采用不同的模型拒绝域相差比较大, 这给实际应用造成困难。本文针对笔者提出的相关模型, 采用 Bartlett 统计量的修正公式, 对土层随机场平稳性检验进行研究, 力图在该方向上进行一些有益的探讨。

2 随机场理论

2.1 数字特征

图 1 为一岩土参数数值沿竖向变化的典型图, 从图中可以看出, 因诸多地质、环境和物理化学因素引起了土体的天然变异性, 以及测量误差造成土性参数呈现在某种程度上的水平向或竖向的变异性, 所以试验曲线可以分解成一光滑的趋势分量和波动分量。设趋势分量为 $t(z)$, 波动分量为 $w(z)$, 则实测数据 $\xi(z)$ 可表示为

$$\xi(z) = t(z) + w(z) \quad (1)$$

式中: z 为土体深度。

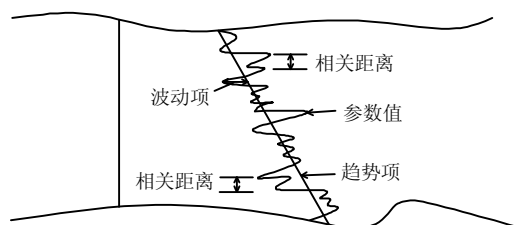


图 1 土性参数的统计表示
Fig.1 Statistical description of soil variability

2.2 相关函数

严格平稳随机场要求过于严格往往难以实现, 因此, 常常只在二阶矩范围内考虑平稳性条件, 也就是弱平稳随机场。本文所提的随机场均指弱平稳随机场。将趋势项除去后, 波动项可以假设为均值为 0 的弱平稳随机场。一维平稳正态随机场与 z 无

关, 都为 $N(0, \sigma)$ 分布, 定义

$$\rho(\tau) = \frac{R(\tau)}{R(0)} \quad (2)$$

显然有 $R(0) = \sigma^2$, 一般称 $\rho(\tau)$ 为标准相关函数, 简称相关函数 (ACF)。

2.3 相关距离

Vanmarcke 1977 年提出^[1], 若存在

$$\lim_{h \rightarrow \infty} h\Gamma^2(h) = \delta_u \quad (3)$$

则对充分大的 h 有近似公式 $h\Gamma^2(h) = \delta_u$, δ_u 称为相关距离, 并假设在此距离内土性完全相关, 大于此距离则认为不相关。

3 相关函数型式的探讨

运用随机场理论进行可靠度分析, 首先要根据实际情况选择相关模型的型式。前人已经提出很多相关模型, 其中较典型的有: 单指数型 (SNX)、双指数型 (SQX) 和指数余弦型 (CEX)。

表 1 不同相关模型及其相关距离
Table 1 Different autocorrelation models and correlation distances

相关模型	方程型式	相关距离
SNX	$\rho(\tau) = \exp(-b \tau)$	$2/b$
SQX	$\rho(\tau) = \exp(-b^2\tau^2)$	$\sqrt{\pi}/b$
CEX	$\rho(\tau) = \exp(-b \tau) \cos(b \tau)$	$1/b$
LGS	$\rho(\tau) = (1+a)/(a + \exp(b \tau))$	$2(1+a)\ln(1+a)/ab$

Vanmarcke 认为, 在相关距离内土性完全相关, 距离大于相关距离则基本不相关, 即采用阶跃型相关模型, 而其他相关模型假定相关系数随距离的增大而减小。可以肯定的是, 当距离较小时, 土性间相关性较大, 随距离的增大相关性逐渐减小。笔者在文献[17]中提出相关模型 (LGS), 可以适用于各种类型的相关函数。为了论文的完整性, 本文对该模型作简要的介绍。模型表达式为

$$\rho(\tau) = \frac{1+a}{a + e^{b|\tau|}} \quad (4)$$

将式 (4) 代入式 (3), 可以计算得相关距离为

$$\delta_u = \lim_{h \rightarrow \infty} h\Gamma^2(h) = \frac{2(1+a)}{ab} \ln(1+a) \quad (5)$$

计算得

$$\lim_{h \rightarrow 0} \Gamma^2(h) = \frac{2(1+a)}{ab} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h \ln(1+a) - \int_0^h \ln(1 + ae^{-b\tau}) d\tau}{h^2} = 1 \quad (6)$$

$$\lim_{h \rightarrow \infty} \Gamma^2(h) = \frac{2(1+a)}{ab} \lim_{h \rightarrow \infty} \frac{\ln(1+a) - \ln(1+ae^{-bh})}{h} = 0 \quad (7)$$

所以式(4)可以作为相关模型, 当 $a=0$ 时, 模型退化为单指数模型 $\rho(\tau) = e^{-b|\tau|}$ 。具体应用时, 可以先由函数拟合求得 a, b 的值, 进而求得相关距离。几种典型的相关模型及其对应的相关距离见表1。

4 随机场的数值模拟

对于均值为0的平稳随机场, Shinozuka 和 Deodatis 推导的数值模拟公式为

$$f(t) = \sqrt{2} \sum_{n=0}^{N-1} A_n \cos(\omega_n t + \phi_n) \quad (8)$$

其中

$$A_n = \sqrt{2G(\omega_k)\Delta\omega} \quad (9)$$

$$\omega_k = k\Delta\omega - \frac{\Delta\omega}{2} \quad (10)$$

$$\Delta\omega = \frac{\omega_{\max}}{N} \quad (11)$$

式中: ϕ_k 服从 $[0, 2\pi]$ 间的均匀分布。 $\omega_{\max}$ 为上端切断频率, 假设此时功率谱密度近似为0; $G(\omega)$ 为功率谱密度, 为相关函数的傅立叶变换, 它给出了从频域描述平稳随机场到空间域描述平稳随机场间的关系。

$$G(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty R(\tau) \cos(\omega\tau) d\tau \quad (12)$$

上式称为维纳-辛钦公式。详细内容请参阅文献[20]。

将相关模型 LGS 代入式(12), 采用数值积分的方法进行计算, 有

$$G(\omega) = \frac{2(1+a)}{\pi} \int_0^\infty \frac{\cos(\omega\tau)}{a + e^{b\tau}} d\tau = \frac{2(1+a)}{\pi} \sum_{n=0}^\infty \int_{2n\pi/\omega}^{2(n+1)\pi/\omega} \frac{\cos(\omega\tau)}{a + e^{b\tau}} d\tau \quad (13)$$

笔者用 Matlab 编制子程序 jsgww 计算此广义积分。将计算值代入式(9), 就可以得到随机场的模拟数据。模拟时要求

$$\Delta t \leq 2\pi/2\omega_{\max} \quad (14)$$

编制程序 simulate 完成随机场的数值模拟。

5 Bartlett 检验方法

Bartlett 统计量主要用于独立多样本方差齐性

检验, 但在小样本的情况下, Bartlett 检验给出的拒绝域误差较大, 傅惠民根据均值相等的原则对其进行了修正, 可以显著提高检验精度, 在大、小样本下都适用^[21]。对两样本的方差 s_1^2 和 s_2^2 , 修正的 Bartlett 统计量为

$$B_{\text{stat}} = \frac{n-1}{C} [2\ln s^2 - (\ln s_1^2 + \ln s_2^2)] \quad (15)$$

式中: n 为数据个数, C 和 s^2 由下式计算

$$C = 1 + \frac{1}{3} \left[\frac{1}{(n-1) + 0.23^{n-1}} - \frac{1}{2(n-1)} \right] \quad (16)$$

$$s^2 = \frac{s_1^2 + s_2^2}{2} \quad (17)$$

Phoon 在实测数据上移动一个窗口, 将一个窗口内的数据分为相等的两段, 计算两段数据的 Bartlett 统计量, 用实测数据上最大的 Bartlett 统计量 $B_{\max}$ 决定接受还是拒绝随机场稳定的零假设。拒绝域 B_{crit} 由相关模型参数模拟随机场, 在模拟的随机场上移动窗口得到。由于 B_{crit} 的概率分布异常复杂, 就用模拟随机场得到的最大统计量作为拒绝域, 他拟合了几种常见模型 B_{crit} 的近似计算公式, 详细内容请参考文献[18]。由文献可以看出, 采用不同的模型拒绝域相差比较大, 这给实际应用造成困难。由于模型 LGS 适用范围很广, 本文采用 Phoon 的思想, 探讨模型 LGS 在随机场稳定性检验方面的应用。笔者编制了主程序 bartlett($a, b, wmx, nn, tmx, mm, v$), 调用子程序 jsgww, simulate 计算实测数据和模拟数据的 Bartlett 统计量。其中 a, b 为模型参数, wmx 为上端切断频率, nn 为频率计算间隔, tmx 为数据最大距离, mm 为数据个数, v 为指示变量, 当 $v > 0$ 时计算模拟数据的 Bartlett 统计量, 当 $v < 0$ 时计算实测数据的 Bartlett 统计量。

笔者本想拟合拒绝域关于 $a, b, tmx, \Delta t$ 的近似计算公式, 但没有找到比较合适的方程式。对实际问题可以依次计算 $B_{\max}$ 和 B_{crit} , 若 $B_{\max} > B_{\text{crit}}$ 则拒绝零假设, 认为随机场不平稳, 在最大 Bartlett 统计量处进行土层第2次划分; 若 $B_{\max} \leq B_{\text{crit}}$ 则接受零假设, 认为此土层内随机场是平稳的。

6 实例分析

本文 CPT 试验数据来自美国地址调查(USGS)地震灾害项目, 网址为 <http://www.usgs.gov/>; 例1

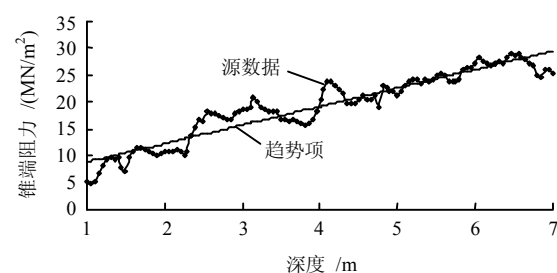
位于 San Bernardino County, CA, 例 2 位于 Evansville area。

正确去除趋势分量很重要, 它将影响随机场参数的计算, 线性最小二乘回归分析 (LSR) 是一个比较好的方法。确定 $w(z)$ 后, 就可以求得不同距离的相关函数 (ACF) 数值

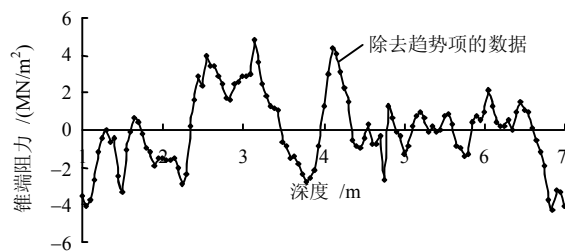
$$\rho(\tau_j) = \frac{\sum_{i=1}^{n_d-j} w_i w_{i+j}}{\sum_{i=1}^{n_d-j} w_i^2} \quad (18)$$

式中: n_d 为样本个数; $\tau_j = j\Delta z$, $j=1, 2, \dots, n_d/4$, 为计算点间距; Δz 为样本间距。

以上计算可以由 Matlab 编程实现, 笔者编制了程序 CACF, 可以用 LSR 完成趋势项分离, 然后计算相关函数。图 2 和图 3 为锥端阻力源数据和除去趋势项后的数据。得到不同间距的相关函数后, 就可以绘制 $\rho(\tau)$ - τ 曲线, 由曲线趋势选定相关模型进行回归。从理论上讲, 该曲线随着间距的增加应该趋向于 0, 但笔者通过对多组数据计算发现, 曲线中后部分很不规则, 这可能是由于 τ 增加, 用于求解 $\rho(\tau)$ 的数据减少, 计算得到的 $\rho(\tau)$ 可信度降低的缘故^[14]。所以在曲线拟合时主要考虑中前部数据的拟合效果。



(a) 源数据

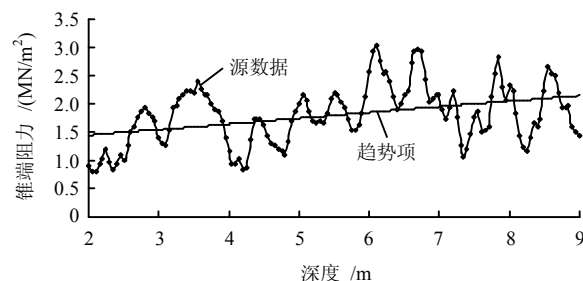


(b) 除去趋势项后数据

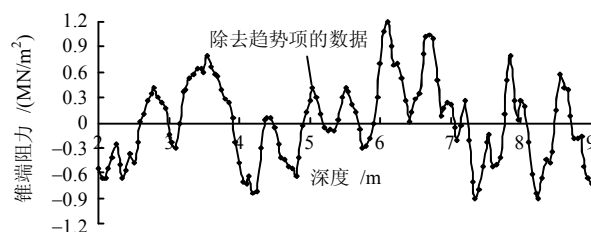
图 2 例 1 锥端阻力

Fig.2 Tip resistance of example 1

看出, 笔者所提的 LGS 模型对相关函数的拟合情况比较好, 能够适应各种不同形式的相关函数, 这为统一随机场平稳性检验标准提供了条件。由相关模型参数可以计算出随机场的相关距离。表 2 为不同相关模型计算所得的相关距离。



(a) 源数据



(b) 除去趋势项后数据

图 3 例 2 锥端阻力

Fig.3 Tip resistance of example 2

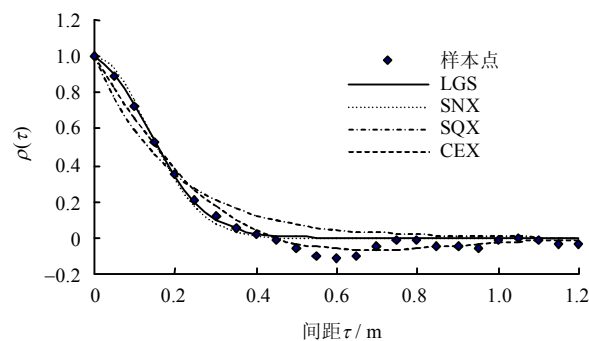


图 4 例 1 相关模型拟合情况

Fig.4 Simulation of ACM of example 1

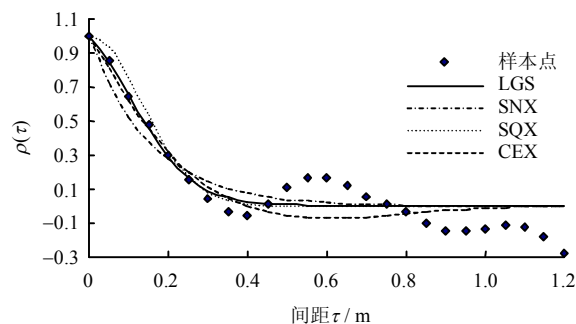


图 5 例 2 相关模型拟合情况

Fig.5 Simulation of ACM of example 2

图 4 和图 5 为相关模型的拟合情况, 由图可以

表 2 不同相关模型对应的相关距离
Table 2 Different autocorrelation models and correlation distances

实例	SNX	SQX	LGS	CEX
例 1	0.385	0.337	0.341	0.295
例 2	0.308	0.335	0.310	0.262

其中例 1 所得的模型参数为: $a=9$, $b=15$, 模型 2 所得的参数为: $a=4$, $b=13$ 。求得参数以后, 运用程序 Bartlett 可计算 $B_{\max}$ 和 B_{crit} 。

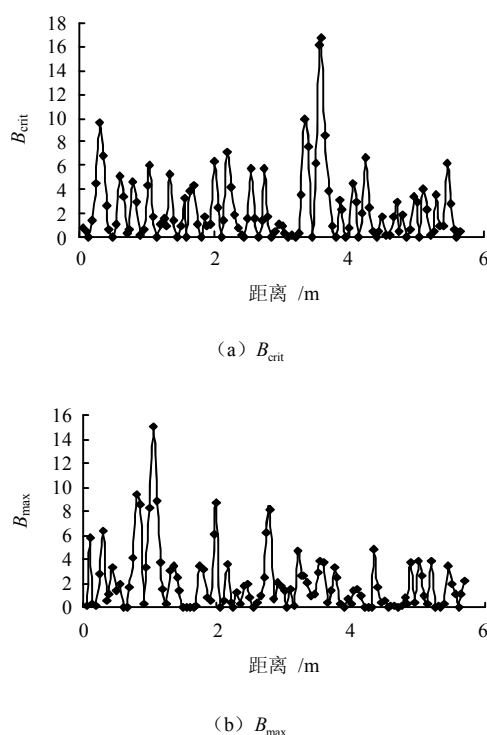


图 6 例 1 bartlett 计算结果
Fig.6 Simulation of example 1

对例 1 选取 $wmx=12.6$, $nn=128$, $tmx=6$, $mm=120$ 。图 6 为例 1 计算结果, 由图可知 $B_{\max}=15.1$, $B_{\text{crit}}=16.7$, $B_{\text{crit}} > B_{\max}$, 所以接受零假设, 认为随机场比较平稳。例 2 模拟过程类似, 可以计算得 $B_{\max}=10.2$, $B_{\text{crit}}=12.3$, $B_{\text{crit}} > B_{\max}$, 接受零假设。

7 结 语

(1) 本文针对笔者提出的相关模型, 介绍了随机场的模拟方法。

(2) 基于 Phoon 提出的随机场平稳性检验方法进行了进一步的研究; 采用改进的 Bartlett 统计量进行计算; 统一了拒绝标准, 解决了不同相关模型

造成拒绝准则不一致的问题。

(3) 最后用网上的实测 CPT 数据进行了实例分析, 计算结果表明, 这种方法检验随机场平稳性可行, 至于进一步应用还需要研究。

(4) 由于 B_{crit} 的分布十分复杂, 本文没有像文献[18]那样总结出计算公式, 而是用程序进行计算, 计算公式的总结还需进一步研究。

致谢: 本文计算过程中得到河海大学理学院周继东老师无私的帮助, 在此表示衷心的感谢。

参 考 文 献

- [1] VANMARCKE, ERIK H. Probabilistic modeling of soil profiles. American Society of Civil Engineers[J]. **Journal of the Geotechnical Engineering Division**, 1977, 103(11): 1227—1246.
- [2] VANMARCKE, ERIK H, SHINOZUKA M, et al. Random fields and stochastic finite element method[J]. **Structure Safety**, 1986, 3: 143—168.
- [3] FENTON G A, VANMARCKE E H. Random field characterization of NGES data[J]. **Geotechnical Special Publication**, 2003, 121: 61—78.
- [4] PHOON K K, KULHAWY F H. Characterization of geotechnical variability[J]. **Canadian Geotechnical Journal**, 1999, 36: 612—624.
- [5] PHOON K K, KULHAWY F H. Evaluation of geotechnical property variability[J]. **Canadian Geotechnical Journal**, 1999, 36: 625—639.
- [6] G L SIVAKUMAR BABU, AMIT SRIVASTAVA, D S N MURTHY. Reliability analysis of the bearing capacity of a shallow foundation resting on cohesive soil[J]. **Canadian Geotechnical Journal**, 2006, 43: 217—223.
- [7] 朱登峰, 高大钊. 土性平稳随机场的空间统计特性分析[J]. 岩土力学, 2003, 24(3): 455—462.
ZHU Deng-feng, GAO Da-zhao. Space statistical characteristics analysis of smooth stochastic field of soil characteristics[J]. **Rock and Soil Mechanics**, 2003, 24(3): 455—462.
- [8] 吴长富, 朱向荣, 刘雪梅. 杭州地区典型土层抗剪强度指标的变异性研究[J]. 岩土工程学报, 2005, 27(1): 94—99.

- WU Chang-fu, ZHU Xiang-rong, LIU Xue-mei. Studies of variability of shear strength indexes for several typical strata in Hangzhou area[J]. **Chinese Journal of Geotechnical Engineering**, 2005, 27(1): 94—99.
- [9] 庞小朝, 周小文, 温庆博, 等. 向量随机场模拟及其在岩土工程中的应用[J]. 清华大学学报, 2003, 43(5): 706—709.
- PANG Xiao-chao, ZHOU Xiao-wen, WEN Qing-bo, et al. Simulation of random vector fields in geotechnical engineering[J]. **Journal of Tsinghua University (Science and Technology)**, 2003, 43(5): 706—709.
- [10] 闫澍旺, 朱红霞, 刘润. 关于随机场理论在土工可靠度计算中应用的研究[J]. 岩土工程学报, 2006, 28(12): 2053—2059.
- YAN Shu-wang, ZHU Hong-xia, LIU Run. Study of application of random field theory to reliability analysis[J]. **Chinese Journal of Geotechnical Engineering**, 2006, 28(12): 2053—2059.
- [11] 刘春原, 闫澍旺. 岩土参数随机场特性及线性预测[J]. 岩土工程学报, 2002, 24(5): 588—591.
- LIU Chun-yuan, YAN Shu-wang. Characteristics of the random field of geotechnical parameters and linear prediction[J]. **Chinese Journal of Geotechnical Engineering**, 2002, 24(5): 588—591.
- [12] 刘润, 闫澍旺, 周宏杰, 等. 空间随机场模型的建立与桩基竖向承载力的可靠度分析[J]. 岩土力学, 2004, 25(10): 1603—1608.
- LIU Run, YAN Shu-wang, ZHOU Hong-jie, et al. Random field modeling and reliability analysis of vertical bearing capacity of pile foundation of ocean structures[J]. **Rock and Soil Mechanics**, 2004, 25(10): 1603—1608.
- [13] 刘润, 闫澍旺, 王金英, 等. 随机场理论在海洋结构物地基可靠度分析中的应用[J]. 天津大学学报, 2003, 36(1): 63—67.
- LIU Run, YAN Shu-wang, WANG Jin-ying, et al. Random field theory in reliability analysis of offshore structure foundations[J]. **Journal of Tianjin University**, 2003, 36(1): 63—67.
- [14] 刘润, 闫澍旺. 渤海湾地基土随机场特性及可靠度分析[J]. 岩土工程学报, 2004, 26(4): 464—467.
- LIU Run, YAN Shu-wang. Random field model and reliability analysis of foundation soil in Bohai gulf[J]. **Chinese Journal of Geotechnical Engineering**, 2004, 26(4): 464—467.
- [15] VESSIA G, CHERUBINI C. Penetration test measures for mechanical characterization of sandy deposits at Scanzano Jonico: geostatistical methods for variability interpretation[C]//Proceedings of the First International Symposium on Geotechnical Safety & Risk. Shanghai: Tongji University, 2007: 227—238.
- [16] UZIELLI M, VANNUCCHI G, PHOON K K. Random field characteristic of stress-normalised cone penetration testing parameters[J]. **Geotechnique**, 2005, 55(1): 3—20.
- [17] WANG Ying-he, WANG Bao-tian. Study of autocorrelation model and reduction function of variance of soil random field[C]//Proceedings of the First International Symposium on Geotechnical Safety & Risk. Shanghai: Tongji University, 2007: 265—271.
- [18] KOK-KWANG PHOON, SER-TONG QUEK, PING-AN. Identification of statistically homogeneous soil layers using modified Bartlett statistics[J]. **Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering**, 2003, 129(7): 649—659.
- [19] KOK-KWANG PHOON, SER-TONG QUEK, PING-AN. Geostatistical analysis of cone penetration test sounding using the modified Bartlett test[J]. **Canadian Geotechnical Journal**, 2004, 41: 356—365.
- [20] MASANOBU SHINOZUKA, GEORGE DEODATIS. Simulation of stochastic processes by spectral representation[J]. **Applied Mechanics Review**, 1991, 44(4): 191—203.
- [21] 傅惠民, 林逢春. Bartlett 统计量的修正公式[J]. 机械强度, 2007, 29(2): 237—240.
- FU Hui-min, LIN Feng-chun. Modification of bartlett's statistics[J]. **Journal of Mechanical Strength**, 2007, 29(2): 237—240.